

5.1 Matrices semblables

Définition 55 (semblables).

Soient $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ deux matrices. S'il existe une matrice $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ inversible telle que

$$(4) \quad \underline{B = P^{-1}AP} \quad \text{i.e. } PB = AP$$

on dira que A est *semblable* à B .

Exemple

$$\begin{array}{ll} \text{Soient} & A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} & \text{On a } AP = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \\ & B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} & \text{et } PB = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \\ & P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & \text{donc } AP = PB. \text{ } P \text{ est inversible} \\ & & \text{et } B = P^{-1}AP \\ & & A = PB P^{-1} \end{array}$$

Remarque: $p_A(\lambda) = (1-\lambda)(4-\lambda) + 12 = p_B(\lambda).$

Remarques On choisit de mettre P^{-1} en premier dans la matricielle:

A est semblable à B

$$(\Leftrightarrow) \quad B = P^{-1}AP \quad (\Leftrightarrow) \quad PB = AP$$

$$(\Leftrightarrow) \quad PB P^{-1} = A \quad (\Leftrightarrow) \quad (P^{-1})^{-1} B P^{-1} = A$$

$$(\Leftrightarrow) \quad Q^{-1}BQ = A \quad \text{en posant } Q = P^{-1}$$

$(\Leftrightarrow)$

B est semblable à A .

Théorème 50. Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres et les mêmes polynômes caractéristiques.

Preuve A et B semblables, donc il existe P inversible avec $B = P^{-1}AP$.

$$\begin{aligned} P_0(\lambda) &= \det(B - \lambda I_n) = \det(P^{-1}AP - \lambda I_n) \\ &= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) = \det(P^{-1}AP - P^{-1}\lambda I_n P) \\ &= \det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) \\ &= \det(P^{-1}) \det(A - \lambda I_n) \det(P) \\ &= \underbrace{\det(P^{-1}) \det(P)}_{=1} \det(A - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_n) \end{aligned}$$

Remarques

⚠️ mêmes valeurs propres $\nRightarrow$ matrices semblables !

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables mais ont les mêmes valeurs propres.

| On observe que A et B sont éq. selon les lignes

Exemples

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables mais pas éq. selon les lignes.

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables et éq. selon les lignes.

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont ni semblables ni éq. selon les lignes.

Donc: Semblables $\nRightarrow$ éq. selon les lignes
 éq. selon les lignes $\nRightarrow$ semblables ⚠️

But: Remplacer A par une matrice diagonale qui lui est semblable.

5.2 Diagonalisation

Pour $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, notre but est de chercher $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ inversible telle que $P^{-1}AP$ soit égale à une matrice diagonale D :

On va chercher s'il existe P inversible avec
 $P^{-1}AP = D$ (diagonale). ($A = PDP^{-1}$)

$$\begin{aligned} A^k &= (PDP^{-1})^k \\ &= (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1}) \\ &= P \underbrace{DP^{-1}P}_{I_n} DP^{-1} \dots PDP^{-1} \\ &= P D^k P^{-1} \end{aligned}$$

Donc A^k et D^k sont aussi semblables et pour

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{nn} \end{pmatrix}, \text{ on a } D^k = \begin{pmatrix} d_{11}^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{nn}^k \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A^k = P D^k P^{-1}$ facile à calculer.

Définition 56 (matrice diagonalisable).

Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice. Si A est semblable à une matrice diagonale D , alors on dira qu'elle est *diagonalisable*. Dans ce cas, on aura

$$\underline{D = P^{-1}AP \text{ et } A = PDP^{-1}.}$$

pour une matrice inversible $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

⚠ Pas toutes les matrices sont diagonalisables !

Théorème 51 (critère de diagonalisation). Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice. Alors A est diagonalisable si et seulement si elle admet n vecteurs propres linéairement indépendants.

Pratiquement :

On cherche d'abord les valeurs propres, puis les espaces propres associés. Si on obtient n vecteurs propres $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ linéairement indépendants, alors on peut poser

$$P = (\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n) \quad \text{et}$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{où } A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$$

- P est inversible car les $\vec{v}_i$ sont lin. indép. et ils forment une base de $\mathbb{R}^n$.

- $D = P^{-1} A P$? On va comparer les colonnes de $A P$ et $P D$:

$$A P = A(\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n) = (A\vec{v}_1 \dots A\vec{v}_n) \quad (\text{déf. du prod. matriciel})$$

$$P D = (\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1 \vec{v}_1 \dots \lambda_n \vec{v}_n)$$

les colonnes sont identiques !

Exemples

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \{1, 2\}$ $\lambda=1$ est de mult. alg. 2

$$\text{On a } E_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Ici on a seulement deux vecteurs propres lin. indép. $\Rightarrow A$ n'est pas diagonalisable !

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \{1, 2\}$ 142

$$E_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{et } E_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pour $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, on a

$$D = P^{-1}AP.$$

Résumé

1. Une matrice $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ est diagonalisable si et seulement si elle admet n vecteurs propres linéairement indépendants.

Ces vecteurs propres forment une base de $\mathbb{R}^n$.

A diag $\Leftrightarrow$ il existe une base formée de vecteurs propres

2. Si A possède r valeurs propres distinctes, alors A admet au moins r vecteurs propres linéairement indépendants.

Chaque valeur propre admet au moins un vecteur propre non nul et les vecteurs associés à des valeurs propres diff. sont lin. indép.

Théorème 52. Soit A une matrice $n \times n$. Si A possède n valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable.

Dans ce cas, chaque valeur propre est de mult. alg. 1.

Remarques

- 1) Si $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ est diag, alors elle n'admet pas forcément n valeurs propres distinctes.
- 2) Si A possède $r < n$ valeurs propres distinctes, alors A peut malgré tout être diagonalisable.
Dans ce cas il faut étudier les espaces propres pour voir s'il y a assez de vecteurs propres lin. indép.

Théorème 53. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice. Si $p_A(\lambda)$ admet n racines comptées avec leur multiplicité, alors A est diagonalisable si et seulement si

$$\dim E_{\lambda_i} = m_i$$

où $m_i =$ multiplicité alg. de la valeur propre λ_i

Exemple $\lambda \in \{1, 2, 4\}$ où $p_A(\lambda) = (\lambda-1)^3(\lambda-2)(\lambda-4)^2$

Alors $p_A(\lambda)$ a six racines et 3 racines distinctes.

$\lambda = 1$	est de mult. alg.	3	} $\left. \begin{array}{l} \dim E_1 = 3 \\ \dim E_2 = 1 \text{ (OK)} \\ \dim E_4 = 2 \end{array} \right\}$
$\lambda = 2$	" " " "	1	
$\lambda = 4$	" " " "	2	
	"et"		

A diag $\Updownarrow$

Définition 57 (multiplicité géométrique).

On appelle

$$\dim E_{\lambda_i}$$

la multiplicité géométrique de la racine λ_i du pol. car. $p_A(\lambda)$ de A .

Théorème 54. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice. Si A est symétrique, alors elle est diagonalisable.

On verra cela en détail au chap. 7.

Remarque : Th. 53 : A diagonalisable

$\Updownarrow$
mult. alg. = mult. géom. pour toutes les valeurs propres de A

5.3 Applications linéaires et valeurs propres

Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ et $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application linéaire définie par

$$T(\vec{v}) = A\vec{v} \quad (*)$$

pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

Notre but est d'exprimer T dans une base $\mathcal{B}$ pour laquelle on obtient une matrice diagonale.

Proposition Soit $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $C = P^{-1}AP$. Si $\mathcal{B}$ est la base de $\mathbb{R}^n$ formée des colonnes de P , alors C est la matrice qui représente T dans la base $\mathcal{B}$. (de départ et d'arrivée)

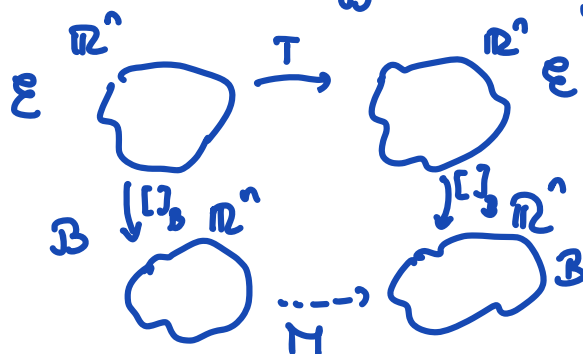
Si $\mathcal{B} = (\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n)$, on aura $C = ([T(\vec{p}_1)]_{\mathcal{B}} \dots [T(\vec{p}_n)]_{\mathcal{B}})$.

Preuve

Soit $P = (\vec{p}_1 \dots \vec{p}_n)$

et $\mathcal{B} = (\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n)$.

c'est une base car P est inversible.



Par (*), on a $T([\vec{p}_i]_{\mathcal{E}}) = A[\vec{p}_i]_{\mathcal{E}} \quad \forall 1 \leq i \leq n$.



$$M = \left([T(\vec{p}_1)]_{\mathcal{B}} \dots [T(\vec{p}_n)]_{\mathcal{B}} \right) \text{ par déf. (p. 128)} \\ = \left([A\vec{p}_1]_{\mathcal{B}} \dots [A\vec{p}_n]_{\mathcal{B}} \right)$$

Avec les digits de base

$$[A\vec{p}_i]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{E}} [A\vec{p}_i]_{\mathcal{E}}$$

$$\text{où } P_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^{-1} = P^{-1} \text{ car}$$

$$P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = ([\vec{p}_1]_{\mathcal{E}} \dots [\vec{p}_n]_{\mathcal{E}}) = P$$

$$M = \left(P_{\mathcal{B}\mathcal{E}} [A\vec{p}_1]_{\mathcal{E}} \dots P_{\mathcal{B}\mathcal{E}} [A\vec{p}_n]_{\mathcal{E}} \right) = P_{\mathcal{B}\mathcal{E}} ([A\vec{p}_1]_{\mathcal{E}} \dots [A\vec{p}_n]_{\mathcal{E}})$$

$$= P^{-1} ([A\vec{p}_1]_{\mathcal{E}} \dots [A\vec{p}_n]_{\mathcal{E}}) = P^{-1} A ([\vec{p}_1]_{\mathcal{E}} \dots [\vec{p}_n]_{\mathcal{E}})$$

$$= P^{-1} A (\vec{p}_1 \dots \vec{p}_n) = P^{-1} AP. \text{ Donc } M = C.$$

Théorème 55. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable avec

$$D = P^{-1}AP.$$

Soit $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^n$ formée des colonnes de P . Alors D est la matrice qui représente T dans la base $\mathcal{B}$.

On a vu que P est la matrice dont les colonnes sont formées des vecteurs propres lin. indép.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda \in \{3, 5\}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2) \quad \leftarrow$$

$$\text{où } A\vec{p}_1 = 5\vec{p}_1 \quad \text{et} \quad A\vec{p}_2 = 3\vec{p}_2. \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$1) \quad T(\vec{p}_1) = A\vec{p}_1 = 5\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dans la base } \mathcal{B} \quad \leftarrow$$

$$T(\vec{p}_2) = A\vec{p}_2 = 3\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2) avec chgt de base :

$$[T(\vec{p}_1)]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{E}} [T(\vec{p}_1)]_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^{-1} A\vec{p}_1 \quad \leftarrow$$

$$\text{On a } P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = ([\vec{p}_1]_{\mathcal{E}} \ [\vec{p}_2]_{\mathcal{E}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = P$$

$$\text{et } P_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^{-1} = P^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ou } P_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = ([\vec{e}_1]_{\mathcal{B}} \ [\vec{e}_2]_{\mathcal{B}})$$

$$[T(\vec{p}_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} A\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow$$

$$\text{et } [T(\vec{p}_2)]_{\mathcal{B}} = \dots \dots \dots = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } ([T(\vec{p}_1)]_{\mathcal{B}} \ [T(\vec{p}_2)]_{\mathcal{B}}) = D$$

Remarque

Si A n'est pas diagonalisable, on peut chercher à remplacer A par une matrice semblable plus simple (mais non diagonale). Pour cela, on peut compléter les vecteurs propres linéairement indépendants de A en une base de $\mathbb{R}^n$.

Considérons par exemple $A = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$. On a $P_A(\lambda) = (\lambda+2)^2$

et $\lambda = -2$ est une valeur propre de mult.alg. = 2

On a $E_{-2} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ et donc la mult.géom. vaut 1.

On ne trouve pas de base formée de vecteurs propres.

Mais: On peut compléter $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ en une base de $\mathbb{R}^2$.

P.ex. $B = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ $\Delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas vecteur propre

Dans ce cas, $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
 $\vec{b}_1 \quad \vec{b}_2$

La matrice $T: \vec{x} \mapsto A\vec{x}$ dans la base B est

$$C = P^{-1}AP$$

avec $C = \left([T(\vec{b}_1)]_B \quad [T(\vec{b}_2)]_B \right)$

$$[T(\vec{b}_1)]_B = \left[\begin{pmatrix} 4 & -9 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_B = \left[\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix} \right]_B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ car}$$

$$\text{et } [T(\vec{b}_2)]_B = \left[\begin{pmatrix} -9 \\ -8 \end{pmatrix} \right]_B = \alpha_1 \vec{b}_1 + \alpha_2 \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -9 \\ -8 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{d'où } \alpha_1 = -3 \text{ et } \alpha_2 = -2$$

Donc $C = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. C'est Δ supérieure et c'est déjà bien.